02 1992

3 0 2

ТУ–19–241–82

8

3

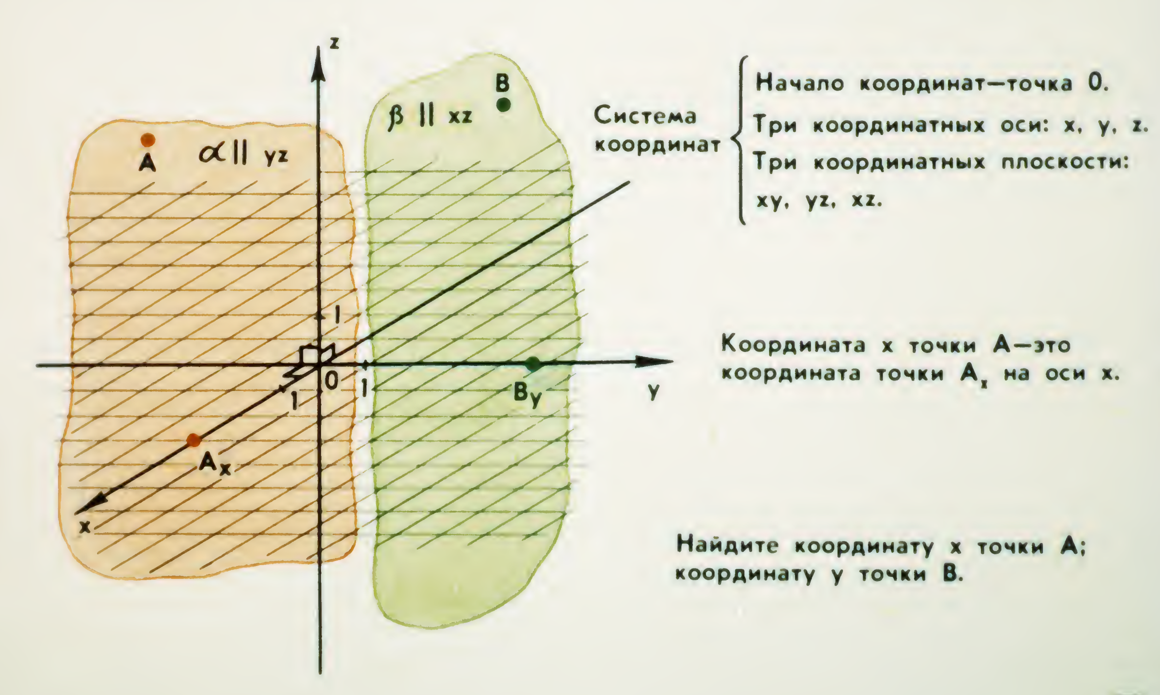

студия
ДИАФИЛЬМ

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

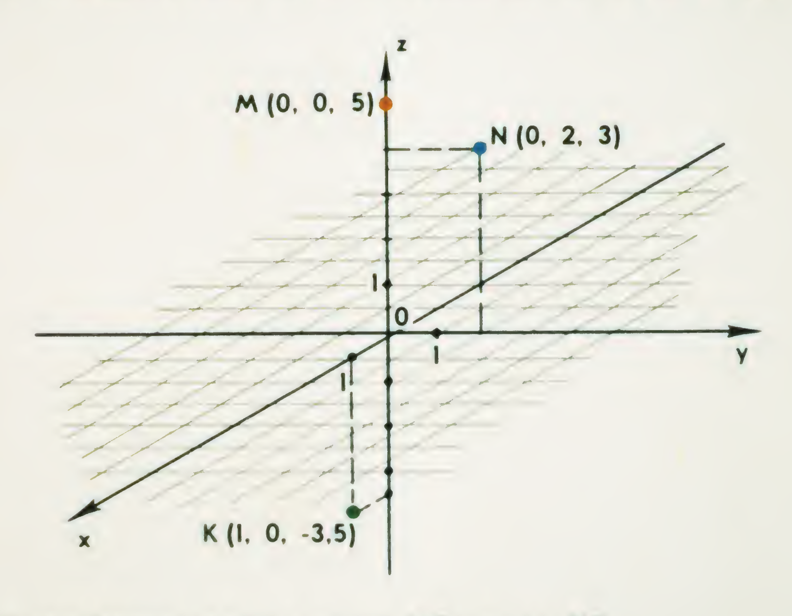
z
1
0
1
Y
1
x

Диафильм по математике для IX (X) классов

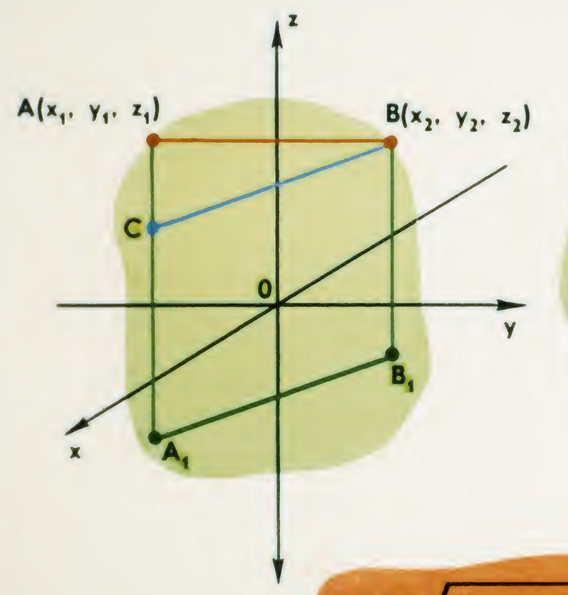
Введение декартовых координат в пространстве



Точка X с координатами x, y, z обозначается X (x, y, z).



В какой плоскости лежит точка N? точка K?
На какой прямой лежит точка M?
Какие из точек A (1, 2, 3), B(0, 1, 2), C(0, 0, 3), P(1, 2, 0) лежат в плоскости xy? в плоскости yz? на оси z?



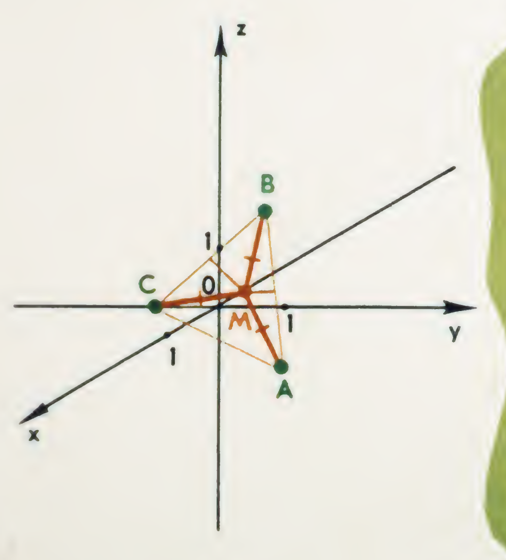
AB ∦ z. Найдем длину AB.

1. Пусть $AA_1 \parallel z$, $BB_1 \parallel z$.
2. Тогда $A_1(x_1, y_1, 0)$, $B_1(x_2, y_2, 0)$.
3. Пусть $BC \parallel A_1B_1$ (в плоскости ABB_1).
4. Тогда $AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + A_1B_1^2 =$
$= (z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Объясните каждый шаг приведенного рассуждения.
Какой будет результат, если $AB \parallel z$?

ЗАДАЧА. В плоскости xy найдите точку M, равноудаленную от трех данных точек: A (0, 1, −1), B (−1, 0, 1), C (0, −1, 0).



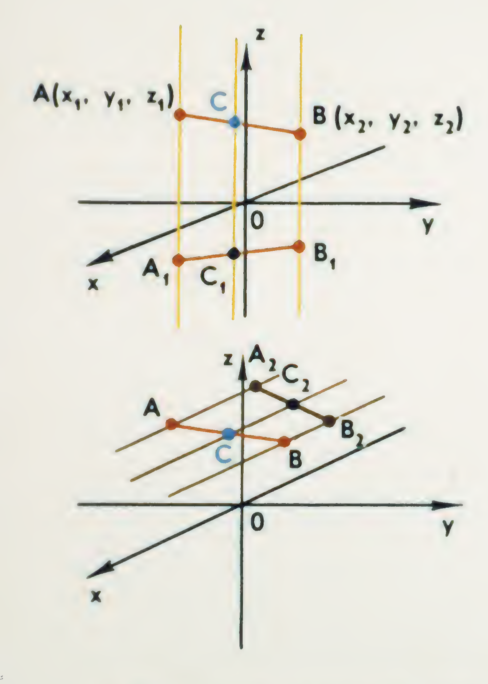
РЕШЕНИЕ:

1. Пусть x, y, ... — координаты точки M.
2. Тогда $AM^2 = (x-0)^2 + \ldots + \ldots$,
   $BM^2 = \ldots$, $CM^2 = \ldots$.
3. $AM^2 = CM^2$, значит,
   $x^2 + y^2 - 2y + 1 + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1$.
   $BM^2 = CM^2$, значит,
   $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1$.
4. Отсюда $4y = \ldots$, $2x = \ldots$.
5. Отсюда $y = \ldots$, $x = \ldots$.

Ответ: M (..., ..., ...).

Объясните и закончите решение.

Найдем координаты точки $C(x, y, z)$ — середины AB.



1. Пусть $AA_1 \parallel z$, $BB_1 \parallel z$, $CC_1 \parallel z$.
2. Тогда $A_1(x_1, y_1, 0)$, $B_1(x_2, y_2, 0)$.
3. Тогда $C_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, 0\right)$.
4. Но $C_1(x, y, 0)$.
5. Значит, $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$.
6. Пусть $AA_2 \parallel x$, $BB_2 \parallel x$, $CC_2 \parallel x$.
7. Тогда $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

Ответ: $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Объясните каждый шаг приведенного рассуждения.

ЗАДАЧА. **Докажите, что четырехугольник ABCK с вершинами A(1, 2, 3), B(0, 2, 4), C(1, 1, 4), K(2, 2, 2) — параллелограмм.**

Каким признаком параллелограмма удобно воспользоваться для решения этой задачи? Решите ее.



Преобразования фигур в пространстве

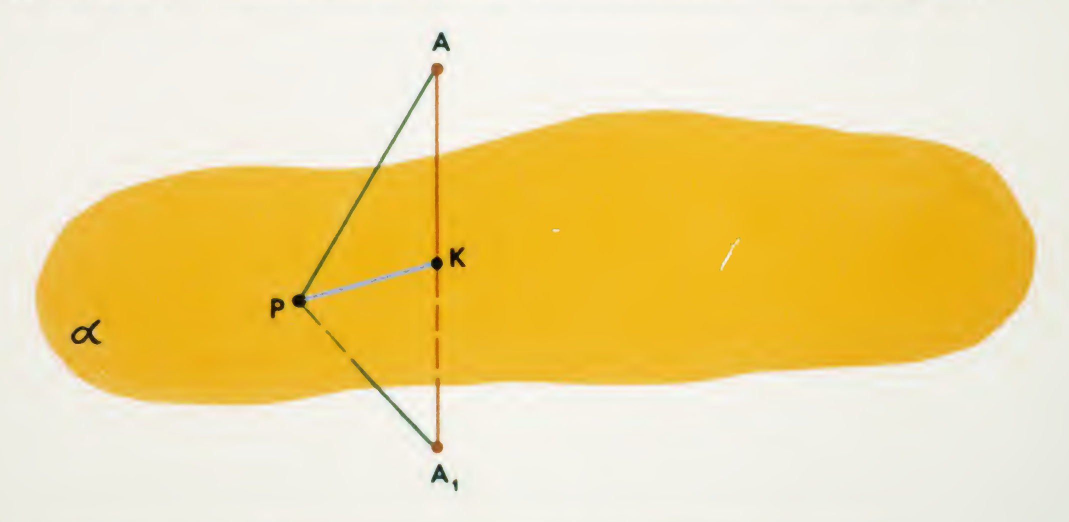
	На плоскости	В пространстве
Симметрия относительно точки	A, O, A_1	B_1, O, B
Симметрия относительно прямой	A, A_1, ℓ	B, B_1, ℓ
Гомотетия	$\overline{OA_1} = K \cdot \overline{OA}$; O, A_1, A	$\overline{OB_1} = K \cdot \overline{OB}$; O, B_1, B

Сформулируйте определения преобразований в пространстве: симметрии относительно точки, симметрии относительно прямой, гомотетии.

Симметрия относительно плоскости:

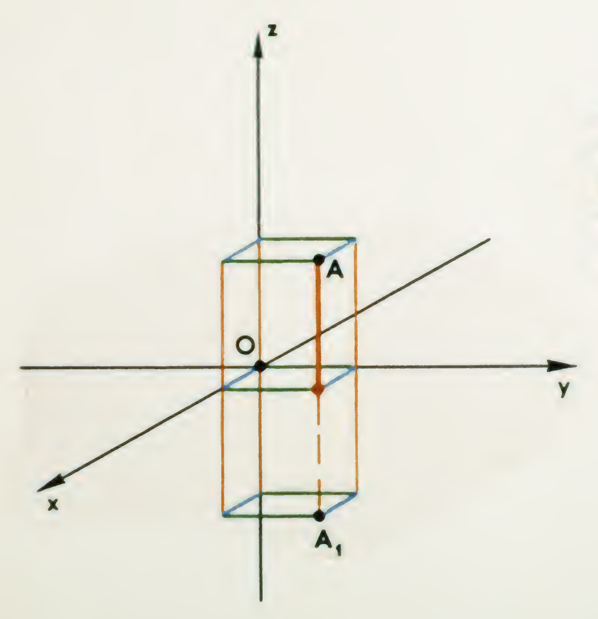
$(AK \perp \alpha,\ K \in \alpha,\ KA_1 = KA) \Leftrightarrow$ (A и A_1 симметричны относительно плоскости α).

$(P \in \alpha) \Leftrightarrow$ (P симметрично себе относительно плоскости α).



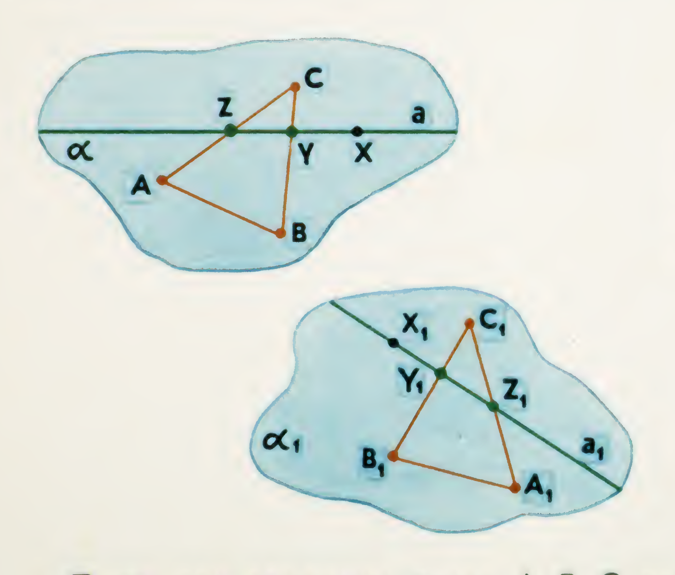
Назовите отрезок, симметричный относительно плоскости α 1) отрезку PA; 2) отрезку AK; 3) отрезку PK; 4) отрезку AA_1.

ЗАДАЧА. Найти точки, симметричные относительно координатных плоскостей точкам: A(1, 2, 3), B(0, −1, 2), C(1, 0, −3).



Определите, как связаны координаты x точек A и A_1, их координаты y и их координаты z, и решите задачу.

Вспомните, какое преобразование называется движением. Симметрии относительно точки, прямой, плоскости — движения.

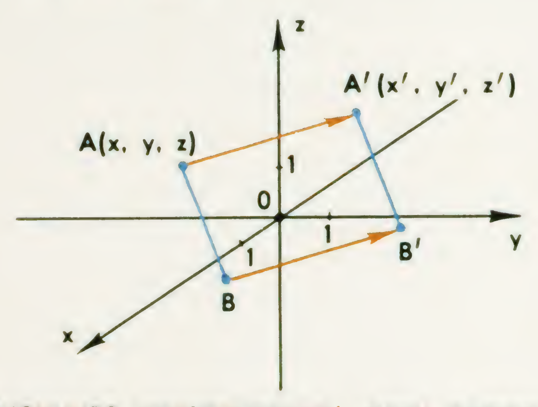


При движении:

1) прямая → прямая;
2) луч → луч;
3) отрезок → отрезок;
4) сохраняются углы между лучами.

Пусть при движении точки A, B, C плоскости α, не лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1 плоскости $α_1$. Докажите, что α переходит в $α_1$.

Вспомните, какими формулами задается параллельный перенос на плоскости.



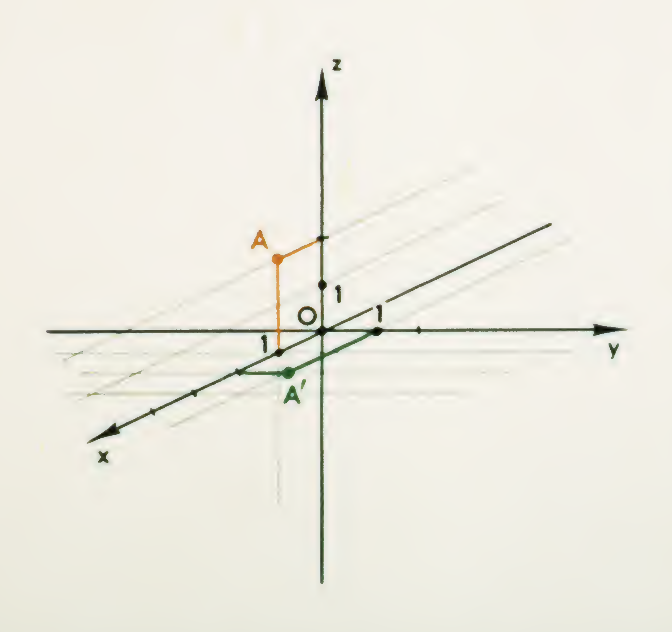
Параллельный перенос в пространстве:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Закончите утверждения: если параллельный перенос переводит A в A′, B в B′, то:

1. AB = … .
2. AA′ ∥ … (или …), AA′ = … .
3. Прямая переходит в … (или в …).
4. Для любых M и M′ существует единственный …, переводящий … .
5. Два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают … .
6. Преобразование, обратное параллельному переносу, есть … .

Найдите a, b и c в формулах параллельного переноса, который переводит A в A'.



$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$



Докажите, что при параллельном переносе плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость.

Сформулируйте определения гомотетии и преобразования подобия.

O

$\overline{OX'} = K \cdot \overline{OX}$

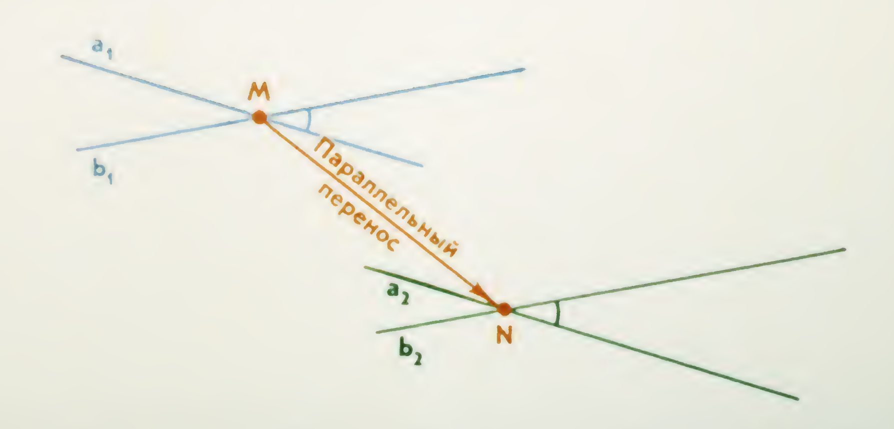
$X'Y' = K \cdot XY$



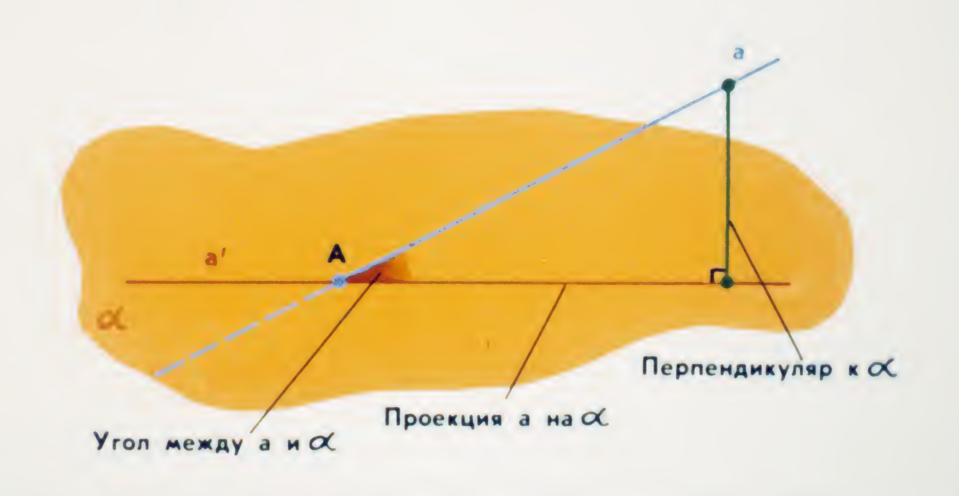
Углы между прямыми и плоскостями

a и b—скрещивающиеся прямые; $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.
Тогда угол между a и b—это угол между a' и b'.

Докажите, используя чертеж, что если $a_1 \parallel a$, $a_2 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $b_2 \parallel b$, то угол между a_1 и b_1 равен углу между a_2 и b_2.

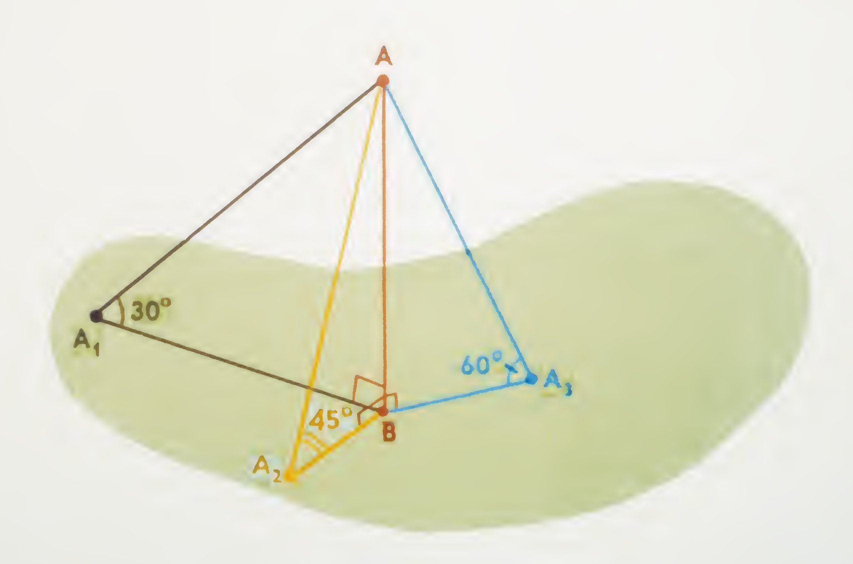


Сформулируйте, воспользовавшись чертежом, определение угла между прямой и плоскостью.



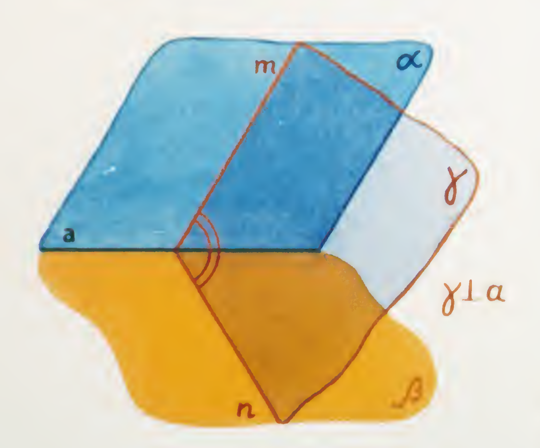
Докажите, что угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между прямой и перпендикуляром к плоскости.

Расстояние от A до α равно h. Найдите длины наклонных, проведенных к α из A под углом 30°; 45°; 60°.

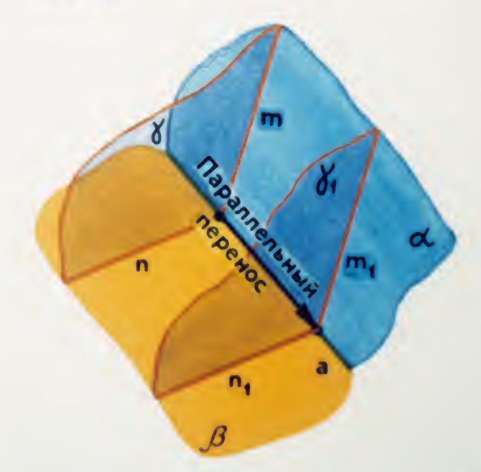


Если плоскости параллельны, то угол между ними считается равным нулю.

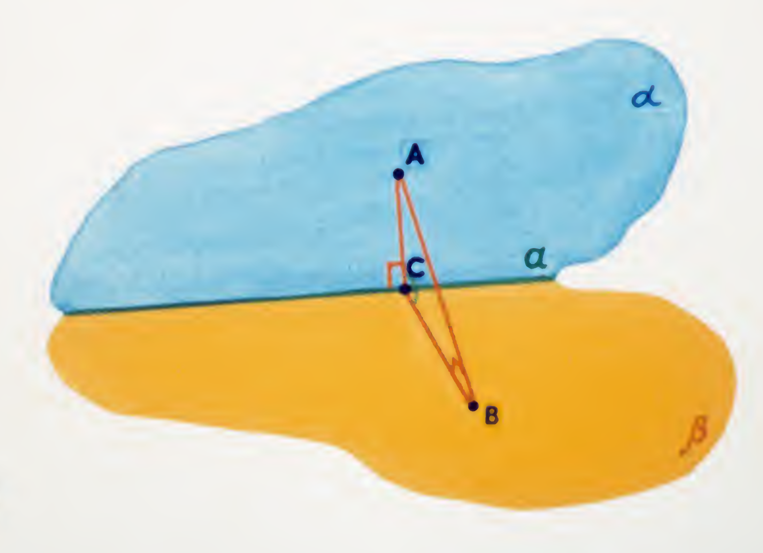
Сформулируйте с помощью чертежа определение угла между пересекающимися плоскостями.



Докажите, что величина угла при этом не зависит от выбора секущей плоскости.



Угол между α и β равен 30°. α и β пересекаются по прямой a. A лежит в α и отстоит от β на расстояние h. Найдите расстояние от A до a.



AB ⊥ β,
AC ⊥ a.

Проверьте свое решение.



$AB \perp \beta$,
$AC \perp a$.

ДАНО:
Угол между α и β равен 30°.
A лежит в α и отстоит от β на расстояние h.

Найти расстояние от A до a.

$(AB \perp \beta,\ AC \perp a) \rightarrow (BC \perp a)$.
Почему?
$(AC \perp a,\ BC \perp a) \rightarrow (\angle ACB = 30°)$.
Почему?
Тогда $AC = h : \frac{1}{2} = 2h$.
Но AC—это расстояние от A до a. (Почему?)

Ответ: 2h.



Площадь ортогональной проекции многоугольника

Ортогональная проекция на плоскость—это параллельная проекция в направлении, перпендикулярном плоскости.

F
60°
α
1)

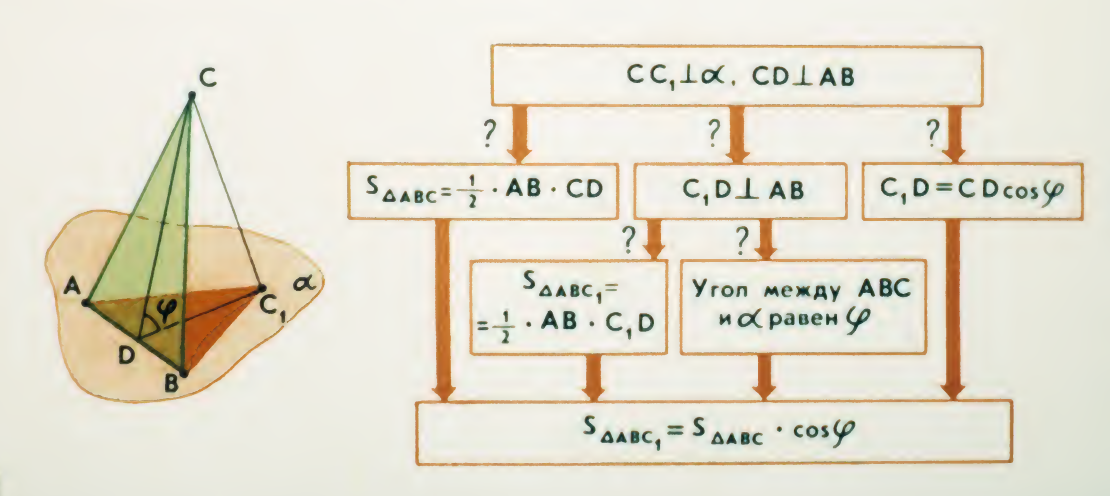
F
α
2)

α
F
3)

В каком случае проекция фигуры F на плоскость α является ортогональной?

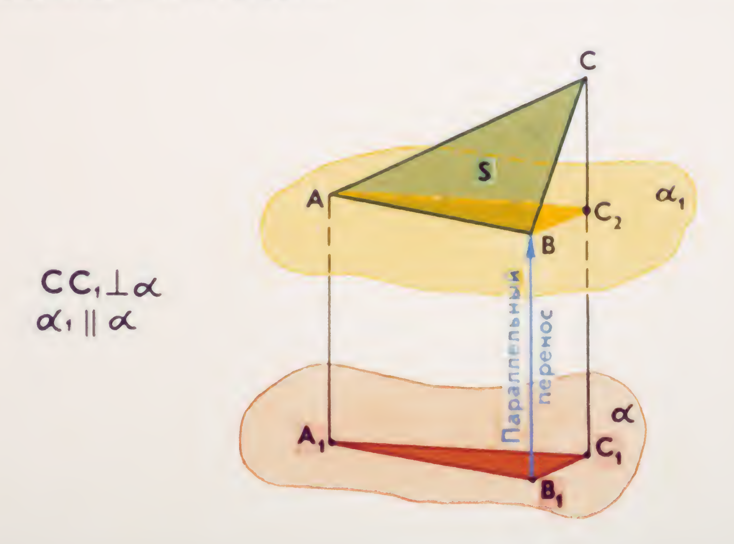
ТЕОРЕМА. **Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.**

Докажите теорему для треугольника и плоскости, проходящей через его сторону.



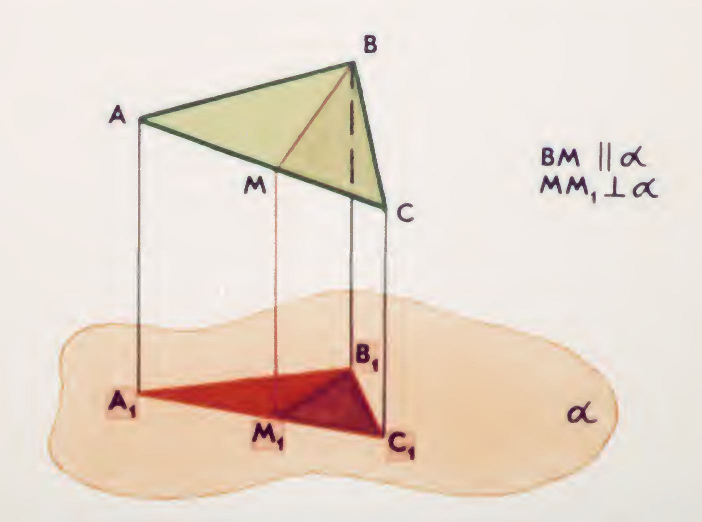
ДОКАЗАТЬ:
$S_{проекции} = S \cdot \cos\varphi$, где
φ — угол между плоскостями.

Докажите теорему для треугольника и плоскости, параллельной его стороне.



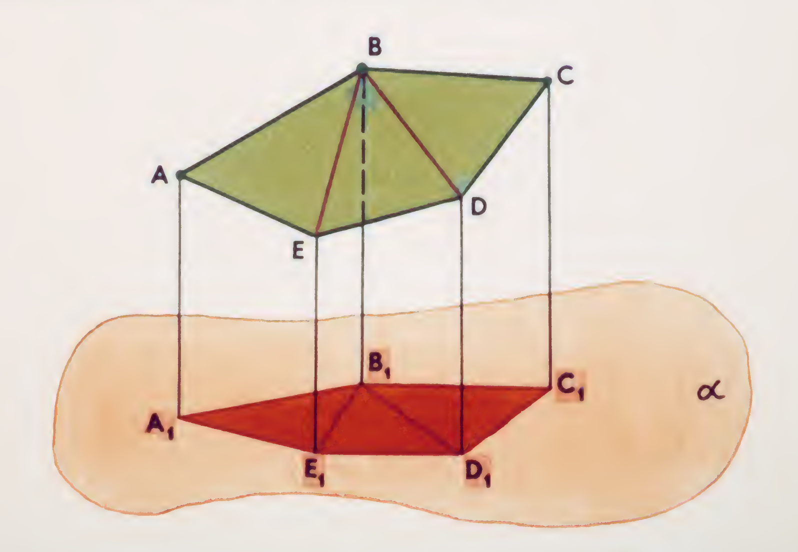
ДОКАЗАТЬ:
$S_{\text{проекции}} = S \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями.

Докажите теорему для треугольника и произвольной плоскости.



ДОКАЗАТЬ:
$S_{\text{проекции}} = S \cdot \cos\varphi$, где
φ — угол между плоскостями.

Докажите теорему для общего случая.



Векторы в пространстве

Вспомните, что такое:

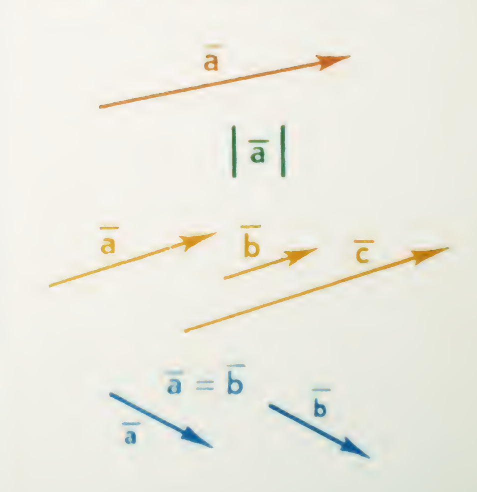
ВЕКТОР,

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА ВЕКТОРА,

НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА,

РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ.

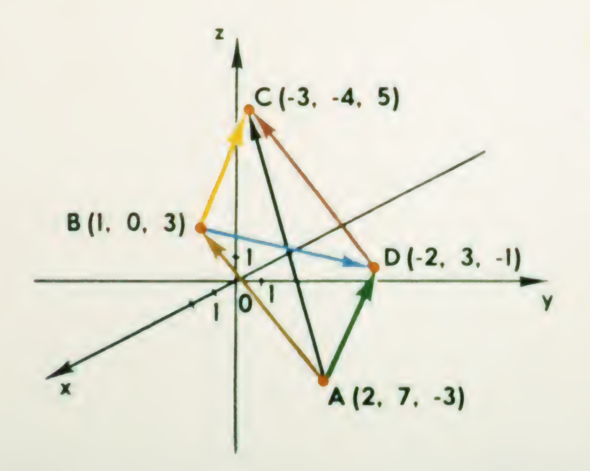
Все эти понятия в пространстве определяются так же, как и на плоскости.



$\bar{a}$ $A_1(x_1, y_1, z_1)$ $A_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = x_2 - x_1 \\ a_2 = y_2 - y_1 \\ a_3 = z_2 - z_1 \end{array}\right\}$$ — координаты вектора $\bar{a}$.

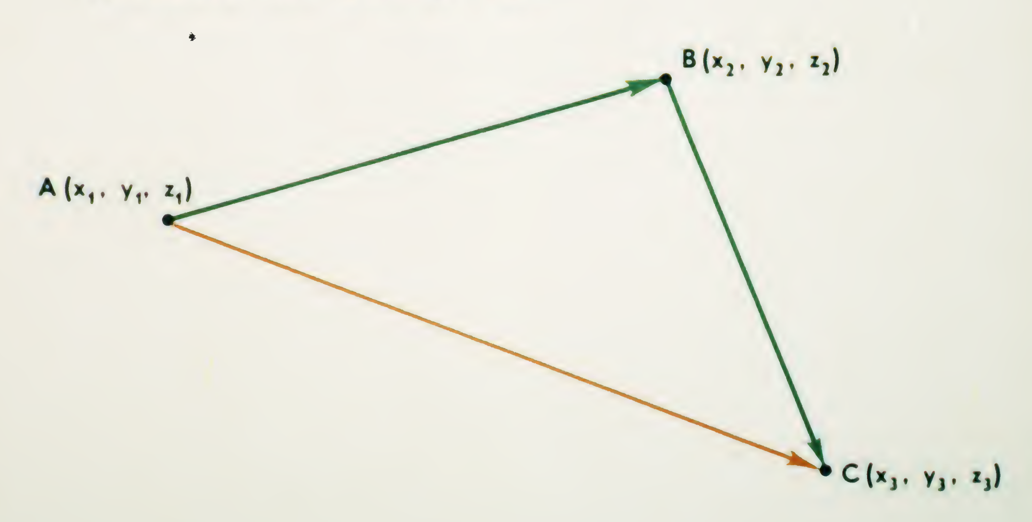
$$(\bar{a}(a_1, a_2, a_3) = \bar{b}(b_1, b_2, b_3)) \Longleftrightarrow (a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3)$$



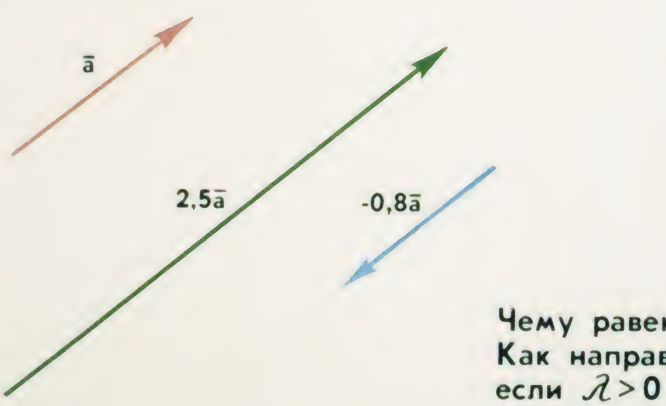
Среди данных векторов найдите равные.

$$\bar{a}\,(a_1,\ a_2,\ a_3) + \bar{b}\,(b_1,\ b_2,\ b_3) = \bar{c}\,(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$

Докажите, что $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.



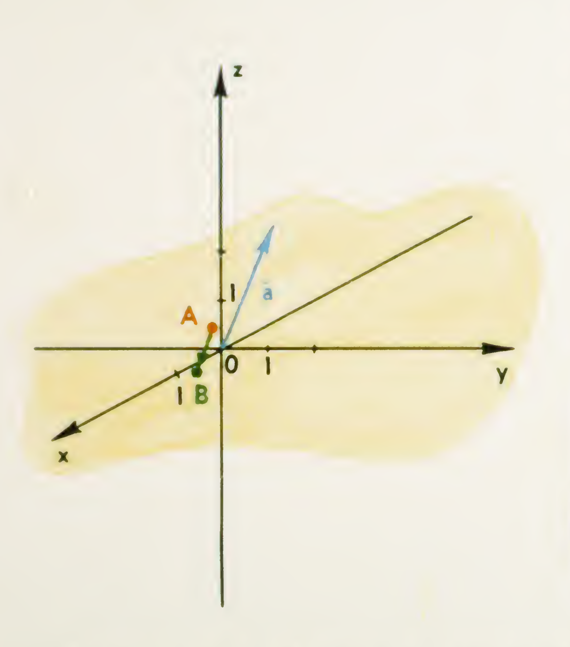
$$\lambda \bar{a} = (\overline{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3})$$



Чему равен $|\lambda \bar{a}|$?
Как направлен вектор $\lambda \bar{a}$,
если $\lambda > 0$? если $\lambda < 0$?

$\overline{a} = (1,\ 2,\ 3)$,
A (1, 1, 1).

Найти в плоскости xy точку B, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{a}$ коллинеарны.



Решение.

Пусть B (x, y, z).

1. z = ...
2. $\overline{AB} = (\overline{\ldots,\ \ldots,\ \ldots})$.
3. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{-1}{3}$.
(Почему?)
4. x = ..., y = ...

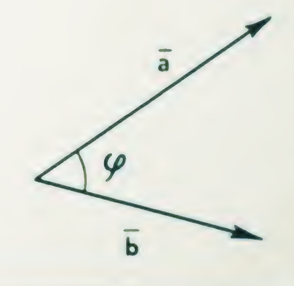
Ответ: B (..., ..., ...).

Закончите и объясните решение.

Если $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то
$\bar{a}\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ — скалярное произведение
векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

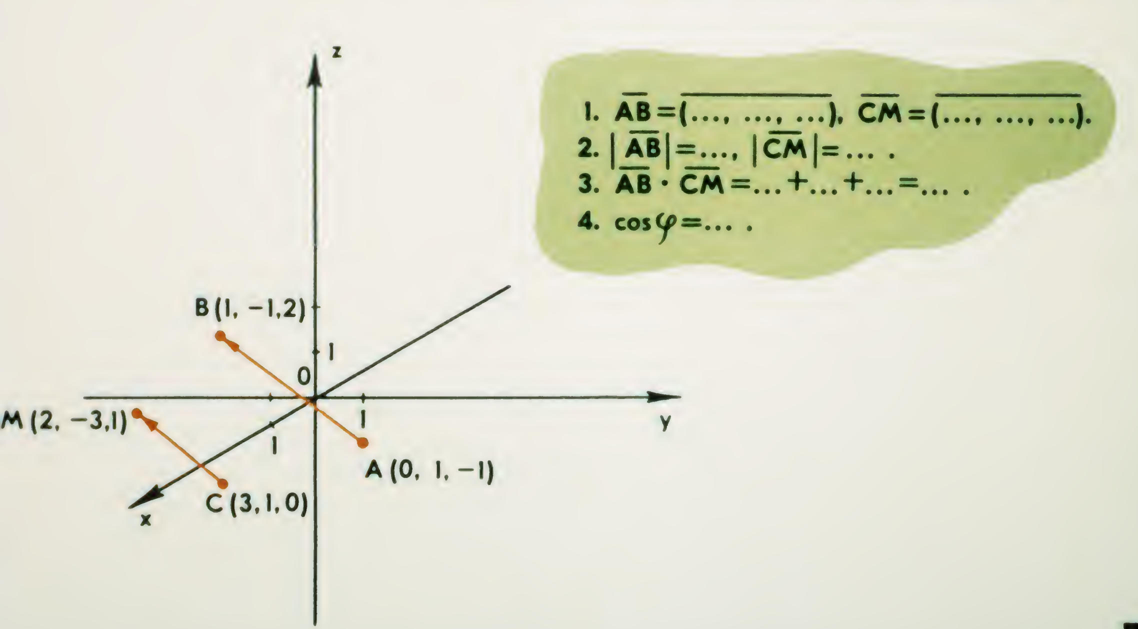
Докажите, что $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Докажите, что $(\bar{a} \perp \bar{b}) \leftrightarrow (\bar{a}\bar{b} = 0)$.

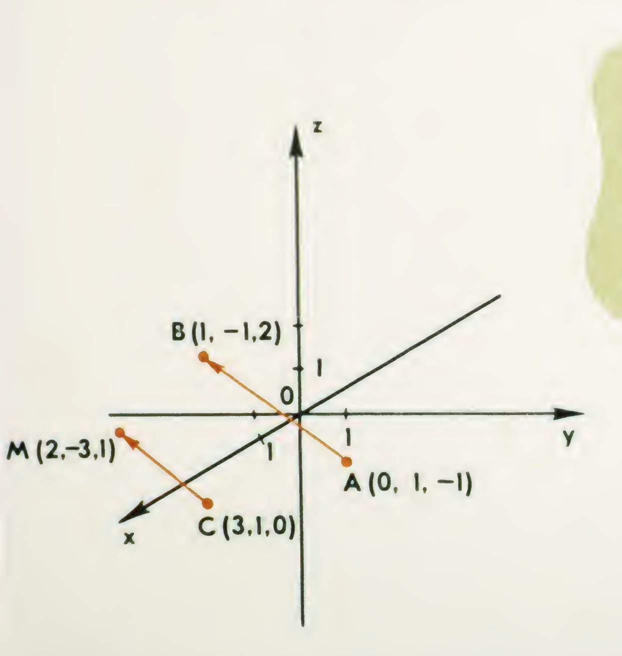


$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi.$

Найдите косинус угла между $\overline{AB}$ и $\overline{CM}$, используя следующий план решения:

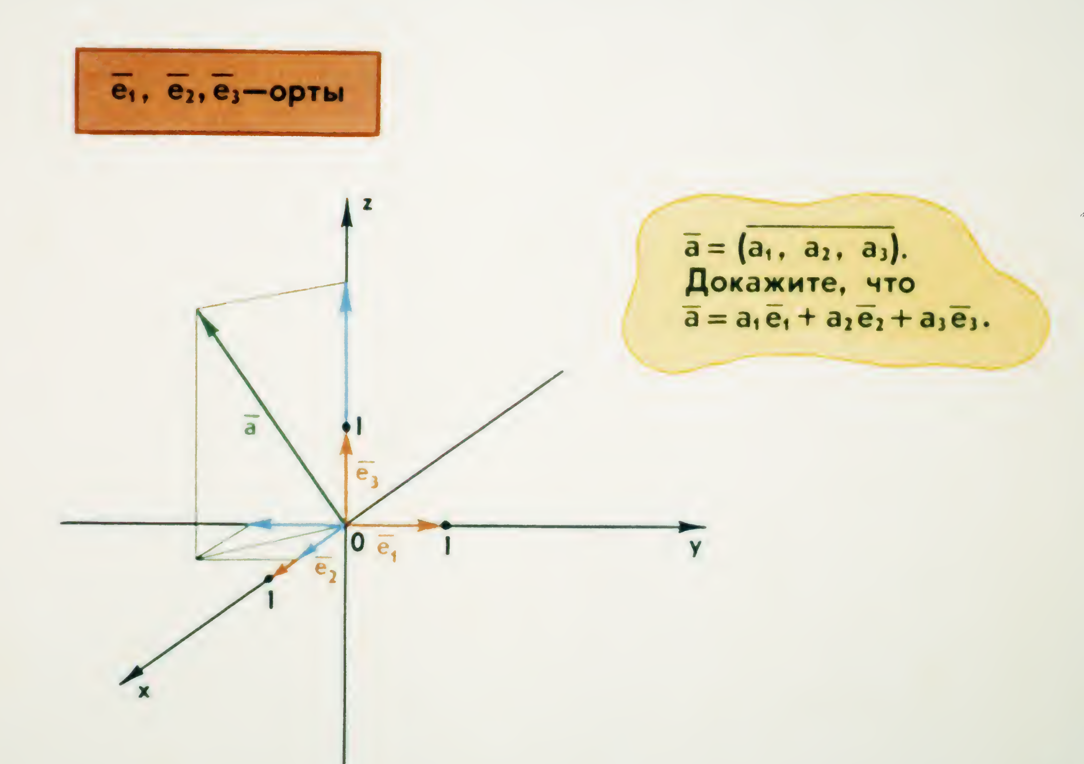


Проверьте свое решение.

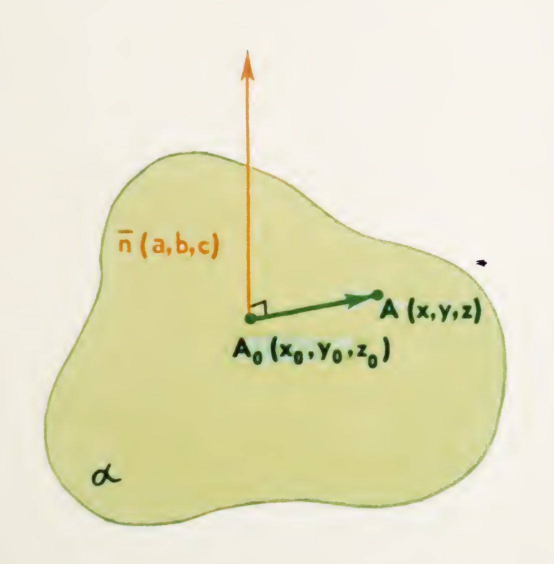


1. $\overline{AB} = \overline{(1-0, -1-1, 2-(-1))} = \overline{(1, -2, 3)}$,
   $\overline{CM} = \overline{(2-3, -3-1, 1-0)} = \overline{(-1, -4, 1)}$.
2. $|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$,
   $|\overline{CM}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}$.
3. $\overline{AB} \cdot \overline{CM} = 1(-1) + (-2)(-4) + 3 \cdot 1 = 10$.
4. $\cos\varphi = \dfrac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{18}} = \dfrac{5}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{9}}$.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{5}{3\sqrt{7}}$.


$\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ — орты
$\overline{a} = \overline{(a_1, a_2, a_3)}$.
Докажите, что
$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3$.
z
1
$\overline{a}$
$\overline{e}_3$
0
$\overline{e}_1$
1
y
$\overline{e}_2$
1
x

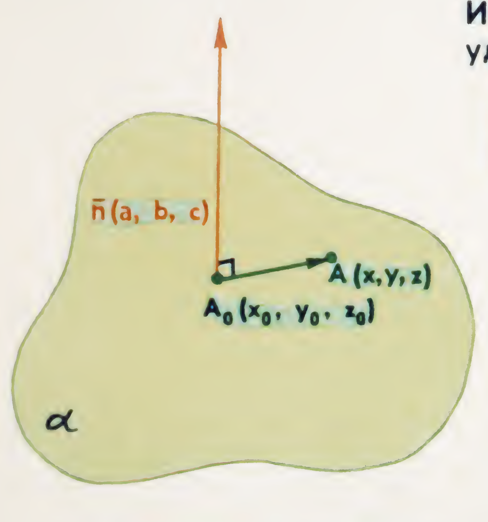
Уравнение плоскости



α — плоскость; A_0, A — точки α; $\overline{n} \perp \alpha$.

Найдите координаты вектора $\overline{A_0 A}$ и определите, чему равно скалярное произведение $\overline{n} \cdot \overline{A_0 A}$.

Так как $\bar{n} \cdot \overline{A_0 A} = 0$, то $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.



Итак, любая точка A плоскости α удовлетворяет уравнению:

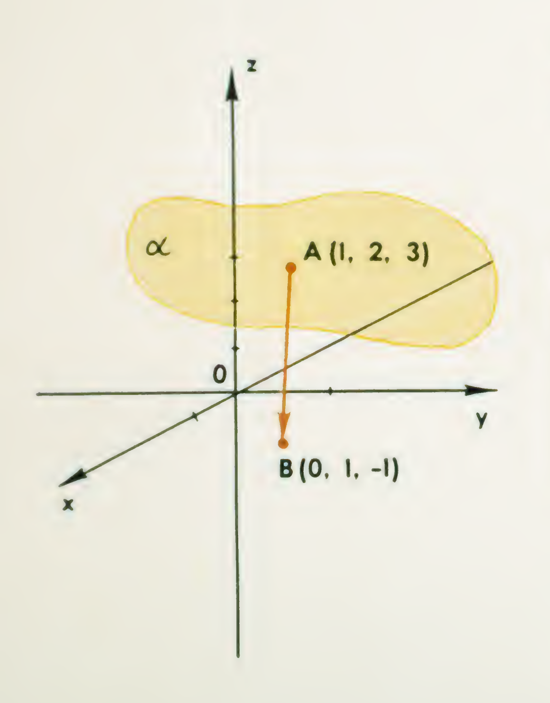
$$ax + by + cz + d = 0.$$

Чему равно d в этом уравнении?

Докажите обратное: если A удовлетворяет этому уравнению, то A лежит в α.

$ax + by + cz + d = 0$ — уравнение плоскости.

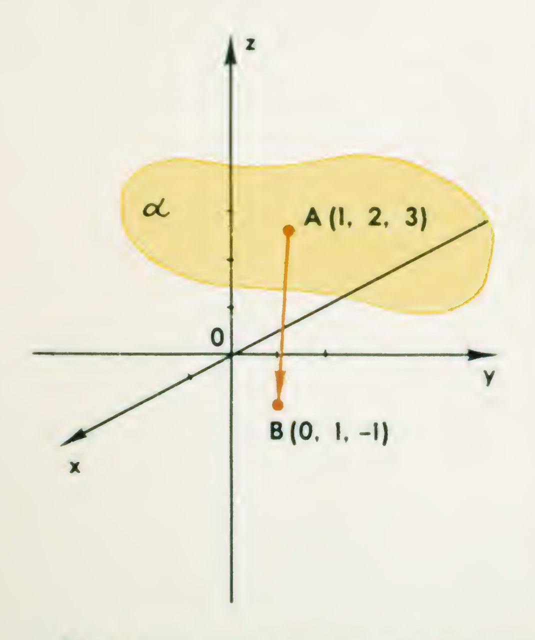
Координатами какого вектора являются здесь числа a, b и c?



Найдите по следующему плану уравнение плоскости α, если A лежит в α и $\overline{AB} \perp \alpha$:

1. $\overline{AB} = \overline{(\ldots,\ \ldots,\ \ldots)}$.
2. Значит, уравнение плоскости: $\ldots x + \ldots y + \ldots z + d = 0$.
3. Чтобы найти d, подставим в это уравнение координаты точки ... .
4. Получим, что $d = \ldots$.

Проверьте свое решение.



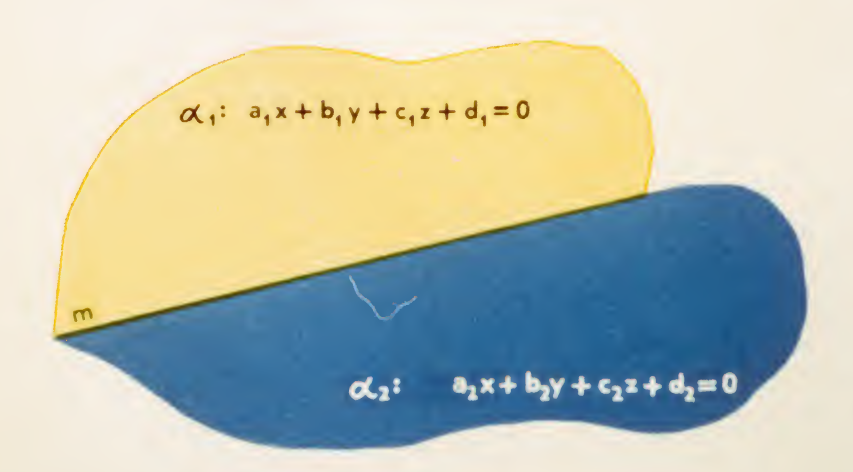
1. $\overline{AB} = \overline{(0-1,\ 1-2,\ -1-3)} = \overline{(-1, -1, -4)}$.
2. Уравнение плоскости: $(-1)x + (-1)y + (-4)z + d = 0$.
3. Подставим координаты точки A: $(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-4)\cdot 3 + d = 0$; $-1 - 2 - 12 + d = 0$.
4. Отсюда $d = 15$.

Ответ: $-x - y - 4z + 15 = 0$.

Как еще можно записать это уравнение?

Докажите, что прямая в пространстве задается системой уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$



КОНЕЦ

Диафильм создан по программе, утвержденной Министерством просвещения СССР

Автор Е. АРУТЮНЯН
Художник-оформитель В. ЕРМОЛАЕВА
Редактор И. КРЕМЕНЬ

Д-111-87

103062, Москва, Старосадский пер., 7

Цветной